РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ

Тезисы Международной (50-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции
3 — 9 февраля 2019 г.

Екатеринбург
2019

УДК 51

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ: тезисы Международной (50-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, 2019.

Настоящее издание включает тезисы Международной (50-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции, прошедшей с 3 по 9 февраля 2019 года в окрестностях г. Екатеринбурга.

Представлены работы по следующим направлениям: алгебра и дискретная математика, математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры, топология и геометрия, компьютерные науки и параллельные вычисления, обработка изображений и навигация по геофизическим полям, приближение функций, математическое программирование, некорректные задачи и анализ данных, математическая биология, теория вероятностей и случайные процессы, нелинейные уравнения в частных производных. Сборник представляет интерес для специалистов по указанным областям науки.

Конференция проведена при финансовой поддержке УрФУ.

Ответственный редактор
чл.-корр. РАН А.А. Махнёв.

Ответственные за выпуск:
С.Ф. Правдин,
П.А. Чистяков.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

И. Н. Банщикова

Рассматривается линейная однородная система с дискретным временем

$$x(m+1) = A(m)x(m), \tag{1}$$

где аргумент m пробегает множество $\mathbb{Z}_+$ целых неотрицательных чисел; неизвестная функция x принимает значения в $\mathbb{R}^n$; коэффициент $A(m)$ при каждом m принадлежит пространству $M_n(\mathbb{R})$ вещественных $n \times n$ матриц. Всюду ниже будем предполагать, что функция $A(\cdot)$ *вполне ограничена* [1], то есть при каждом m существует $A^{-1}(m)$, и найдется такое a_0, что $\sup\limits_m \big(\|A(m)\| + \|A^{-1}(m)\|\big) \leqslant a_0$.

В задачах управления асимптотикой решений линейных систем с дискретным временем важную роль играет понятие полного спектра показателей Ляпунова. Известно (см., например, [2]), что в общем случае показатели Ляпунова системы (1) не обладают свойством устойчивости по отношению к малым возмущениям коэффициентов системы. Это обстоятельство сильно затрудняет возможность управления показателями, а потому и асимптотикой решений системы (1). Поэтому важной задачей является исследование условий, обеспечивающих устойчивость показателей Ляпунова системы (1). Введем необходимые понятия.

Для произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (1) определим его *показатель Ляпунова* равенством $\lambda[x] \doteq \varlimsup\limits_{m\to\infty} m^{-1} \ln \|x(m)\|$ и обозначим через Λ *спектр показателей Ляпунова* системы (1), то есть множество всех чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для каждого из которых существует нетривиальное решение $x(\cdot)$ системы (1) с показателем λ. Известно [3, с. 51–52], что спектр показателей Ляпунова системы (1) состоит не более чем из n различных чисел и расположен на отрезке $[-\ln a_0, \ln a_0]$. Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1(A), \ldots, \Lambda_q(A)\}$, где $\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_q$, $q \leqslant n$. Показатель Ляпунова тривиального решения полагаем равным $-\infty$.

Для каждого $j \in \{1, \ldots, q\}$ рассмотрим множество $\mathcal{E}_j$ всех решений системы (1), показатели которых не превосходят Λ_j. Множество $\mathcal{E}_0$ считаем состоящим из тривиального решения системы (1). Тогда [3, с. 54] каждое из множеств $\mathcal{E}_j$ является линейным подпространством, имеют место строгие вложения $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{E}_q$ и неравенства $0 = \dim \mathcal{E}_0 < \dim \mathcal{E}_1 < \ldots < \dim \mathcal{E}_q = n$. Положим $n_j = \dim \mathcal{E}_j - \dim \mathcal{E}_{j-1}$ и назовем n_j *кратностью* показателя Λ_j, $j = 1, \ldots, q$. Заметим, что $n_1 + n_2 + \ldots, n_q = n$. Набор n чисел $\Lambda_1(A), \ldots, \Lambda_1(A), \ldots, \Lambda_2(A), \ldots, \Lambda_q(A)$, где каждое Λ_j повторяется n_j раз, называется *полным спектром показателей Ляпунова* системы (1). Будем обозначать его $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$.

Определение 1 [4]. Показатели Ляпунова линейной системы (1) называются *устойчивыми*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всякой мультипликативно возмущенной системы вида $y(m+1) = A(m)R(m)y(m)$ с возмущением $R : \mathbb{Z}_+ \to M_n(\mathbb{R})$, удовлетворяющим условию $\sup\limits_m \|R(m) - E\| < \delta$, выполнены неравенства $|\lambda_i(A) - \lambda_i(AR)| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$.

Определение 2. Пусть $D : \mathbb{Z}_+ \to M_k(\mathbb{R})$ — произвольная вполне ограниченная функция. *Верхним центральным показателем (Винограда)* и *младшим центральным показателем показателем (Миллионщикова)* функции $D(\cdot)$ будем называть соответственно величины

$$\Omega(D)=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{m}\ln\Bigl\|\prod_{l=(j-1)T}^{jT-1}D(l)\Bigr\|,$$

$$\overline{\omega}(D)=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{m}\ln\Bigl\|\Bigl(\prod_{l=(j-1)T}^{jT-1}D(l)\Bigr)^{-1}\Bigr\|^{-1}.$$

Определение 3. *Преобразованием Ляпунова* системы (1) называется линейное преобразование вида

$$z(m)=L(m)x(m), \tag{2}$$

где матрица $L:\mathbb{Z}_+\to M_n(\mathbb{R})$ вполне ограничена.

Теорема. *Показатели Ляпунова системы* (1) *устойчивы тогда и только тогда, когда существует преобразование Ляпунова* (2), *приводящее систему* (1) *к системе* $z(m+1)=D(m)z(m)$ *с блочно-диагональной матрицей коэффициентов* $D(m)=\operatorname{diag}\bigl(D_1(m),\dots,D_q(m)\bigr)$, *обладающей следующими свойствами:*
1) для каждого $j\in\{1,\dots,q\}$ *матрица* $D_j(m)\in M_{n_j}(\mathbb{R})$ *нижняя треугольная;*
2) имеют место равенства $\Omega(D_j)=\overline{\omega}(D_j)=\Lambda_j,\ j=1,\dots,q$;
3) блоки $D_1(\cdot),\dots,D_q(\cdot)$ *интегрально отделены, то есть существуют такие* $\alpha>1$ *и* $\gamma>0$, *что при всех* $m>s$ *и* $j\in\{1,\dots,q-1\}$ *справедливы неравенства*

$$\Bigl\|\Bigl(\prod_{l=s}^{m-1}D_{j+1}(l)\Bigr)^{-1}\Bigr\|^{-1}\geqslant\gamma\alpha^{m-s}\Bigl\|\prod_{l=s}^{m-1}D_j(l)\Bigr\|.$$

Аналогичное утверждение для систем с непрерывным временем было получено В. М. Миллионщиковым [5] и Б. Ф. Быловым, Н. А. Изобовым [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-51-41005).

Список литературы

[1] В. Б. Демидович, *Об одном признаке устойчивости разностных уравнений*, Дифференциальные уравнения. **5**:7 (1969), 1247–1255.

[2] И. Н. Банщикова, *Пример линейной дискретной системы с неустойчивыми показателями Ляпунова*, Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. **26**:2 (2016), 169–176.

[3] И. В. Гайшун, *Системы с дискретным временем.* Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. 400 с.

[4] И. Н. Банщикова, С. Н. Попова, *О спектральном множестве линейной дискретной системы с устойчивыми показателями*, Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. **26**:1 (2016), 15–26.

[5] В. М. Миллионщиков, *Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений*, Дифференциальные уравнения. **5**:10 (1969), 1775–1784.

[6] Б. Ф. Былов, Н. А. Изобов, *Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы*, Дифференциальные уравнения. **5**:10 (1969), 1794–1803.

Удмуртский государственный университет, Ижевск (Россия)
E-mail address: banshhikova.irina@mail.ru

Содержание

Алгебра и дискретная математика (председатель к.ф.-м.н. Н.В. Маслова)

Математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры (председатели к.ф.-м.н. Д.В. Хлопин и к.ф.-м.н. М.И. Гомоюнов)

Топология и геометрия (председатель д.ф.-м.н. А.В. Осипов)

Компьютерные науки и параллельные вычисления (председатели д.ф.-м.н. Е.Е. Иванко и М.А. Черноскутов)

Обработка изображений и навигация по геофизическим полям (председатели к.ф.-м.н. В.Б. Костоусов и к.ф.-м.н. Ф.А. Корнилов)

Теория функций (председатель к.ф.-м.н. Р.Р. Акопян)

Математическое программирование, некорректные задачи и анализ данных (председатель д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай)

Математическая биология (председатель к.ф.-м.н. С.Ф. Правдин)

Теория вероятностей и случайные процессы (председатель к.ф.-м.н. Ю.В. Авербух)

Нелинейные уравнения в частных производных: качественная теория и численные методы (председатель д.ф.-м.н. А.А. Ковалевский)